第23講　新課程　期待値

§1 ▶ 期待値

要点整理 と 公式

要点 1 期待値

1000 本中 1 本が当たりのくじで，その賞金が 10000円であるとき，くじ 1 本あたりの賞金額の平均は 10000 ÷ 1000 = 10(円) である。ここで

$$10000 \div 1000 = 10000 \times \frac{1}{1000}$$

である。10000 は賞金額であり，$\frac{1}{1000}$ はこのくじを 1 本引いたときの当たりくじを引く確率であるから，このくじ 1 本あたりの賞金額の平均は，賞金額とそれが当たる確率の積と考えることができる。

同様に，1000本のくじがあり，賞金および本数が右の表の通りであるとき，賞金額の総額は

$$10000 \times 1 + 2000 \times 3 + 0 \times 996 = 16000(\text{円})$$

であるから，くじ 1 本あたりの賞金額の平均は

$$16000 \div 1000 = 16(\text{円})$$

	賞金	本数
1等	10000円	1本
2等	2000円	3本
はずれ	0円	996本
合計		1000本

であり

$$16000 \div 1000 = (10000 \times \quad + 2000 \times \quad + 0 \times \qquad) \times \frac{1}{1000}$$

$$= \qquad \times \frac{\quad}{1000} + \qquad \times \frac{\quad}{1000} + \quad \times \frac{\quad}{1000}$$

と表せることから，このくじ 1 本あたりの賞金額の平均は，賞金額とそれが当たる確率の積をすべて足し合わせたものと考えることができる。

一般に，ある試行によって起こる事象 A_1，A_2，A_3，……，A_n が排反事象で，これらの事象が起こる確率をそれぞれ p_1，p_2，p_3，……，p_n（$p_1+p_2+p_3+\cdots\cdots+p_n=1$）とする。また，$A_1$，$A_2$，$A_3$，……，$A_n$ が起こるとき，変量 X がそれぞれ x_1，x_2，x_3，……，x_n という値をとるとする。このとき

$$x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\cdots\cdots+x_np_n$$

を変量 X の「　　　　　　」という。

期待値

変量 X のとりうる値を x_1，x_2，……，x_n とし，それぞれの値をとる確率を p_1，p_2，……，p_n とすると，期待値 E は

$$E=x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$$

X	x_1	x_2	……	x_n	計
確率	p_1	p_2	……	p_n	1

（ex）　1 個のさいころを投げるとき，出る目の期待値

1 ～ 6 のどの目が出る確率も $\dfrac{1}{6}$ であるから，出る目の期待値は

$$1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}\ (=3.5)$$

1

赤玉 2 個，白玉 3 個が入った袋から，同時に 2 個の玉を取り出すとき，次の問いに答えよ。

(1) 赤玉の個数の期待値を求めよ。

(2) 赤玉 1 個につき 100 円もらえるとき，1 回の試行で受け取る金額の期待値を求めよ。

Point Pickup

期待値

変量 X のとる値と確率が右の表の通りであるとき，X の期待値は

$$x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$$

X	x_1	x_2	……	x_n	計
確率	p_1	p_2	……	p_n	1

｛解答｝

第23講　確認テスト

1　赤玉２個，白玉４個が入った袋から同時に２個の玉を取り出すとき，次の問いに答えよ。

(1)　赤玉の個数の期待値を求めよ。

$$\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\ (\text{個})$$

(2)　赤玉１個につき 100 円もらえるとき，１回の試行で受け取る金額の期待値を求めよ。

$$\frac{\boxed{\text{ウエオ}}}{\boxed{\text{カ}}}\ (\text{円})$$

{ Note }

第24講　新課程　仮説検定

§1　外れ値，仮説検定の考え方

要点整理 と 公式

要点 1　外れ値

次のデータは，あるゲームの７回分の得点の記録を小さい方から順に並べたものである。

　　　3，4，5，6，6，7，18（点）

平均値は７点であり，７回中６回の記録が平均点以下である。これは，18 点という記録が他の記録と比べて極端に大きいことによるものである。

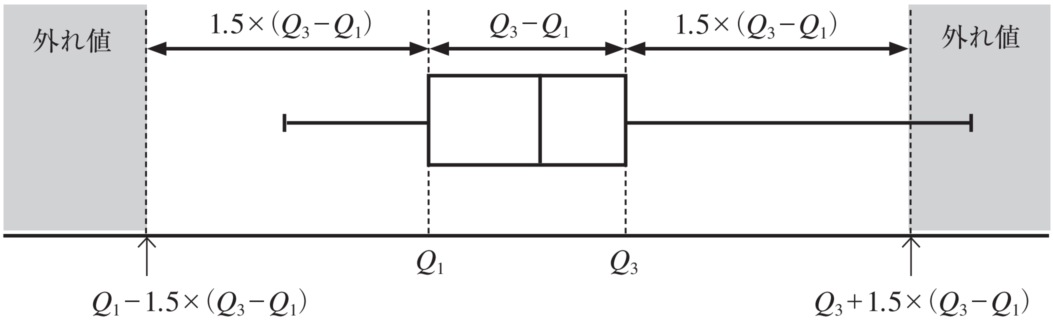
データの中に，他の値と極端にかけ離れた値が含まれる場合，その値を「　　　　　」という。

次のような値を外れ値と定める方法がある。

　データの第１四分位数を Q_1，第３四分位数を Q_3 とするとき

　・$Q_1 - 1.5 \times (Q_3 - Q_1)$ 以下の値

　・$Q_3 + 1.5 \times (Q_3 - Q_1)$ 以上の値



つまり，データの第１四分位数および第３四分位数から，四分位範囲の 1.5 倍以上外側に離れた値を外れ値とみなす方法である。

前述のデータにおいて，$Q_1 =$ 　，$Q_3 =$ 　，四分位範囲 $Q_3 - Q_1 =$ 　より

・$Q_1 - 1.5 \times (Q_3 - Q_1) = \quad - 1.5 \times \quad = -0.5$

・$Q_3 + 1.5 \times (Q_3 - Q_1) = \quad + 1.5 \times \quad = 11.5$

よって，外れ値は −0.5 点以下，または 11.5 点以上の値であり，18 点という記録は外れ値とみなすことができる。

※測定ミスや，入力ミスなどによって生じた値を「異常値」といい，その値には価値がない。
外れ値について，その原因が上記のようなミスによって生じた異常値ではない場合は，その外れ値の観測対象に，様々な問題解決や改善の手がかりを見いだせる可能性がある。

要点❷ 仮説検定

「仮説検定」… ある仮説を立てて，それが成り立つかどうかを統計的に検証する手法

仮説検定の主な流れは以下の通り。

Ⅰ　主張したい仮説を立てる

Ⅱ　Ⅰに「　　　　　　」仮説を立てる

Ⅲ　Ⅱで立てた仮説が正しいかどうかを統計的に検証し

(i)「　　　　　　」と判断できる場合　→　Ⅰで立てた仮説が正しいといえる

(ii)「　　　　　　」とは判断できない場合　→ Ⅰで立てた仮説が正しいとはいえない

Ⅲにおける検証方法として，Ⅱの仮説のもとで実際にその事象が起こる「　　　　　」を計算し，その結果が

あらかじめ定めた基準となる確率より「　　　　　」

→　その事象が起こることは極めて珍しい，普通なら起こりえない

→　Ⅱで立てた仮説が誤っていると判断できる

あらかじめ定めた基準となる確率より「　　　　　」

→　その事象が起こることは珍しいとはいえない，起こりえないとはいえない

→　Ⅱで立てた仮説が誤っていると判断できない

とする。

あらかじめ定める基準となる確率は，0.05（５%）または 0.01（１%）とすることが多い。

（ex）A 校の野球部と B 校の野球部は，互角の実力といわれている。この 2 校で対戦した練習試合の直近 5 試合の結果は，A 校の 5 連勝であった。

Ⅰ　「A 校の野球部の方が B 校の野球部より強い」という仮説を立てる

Ⅱ　「A 校の野球部と B 校の野球部は互角の実力」という仮説を立てる。

　すなわち，A 校の野球部が B 校の野球部に勝つ確率は　　とする。

Ⅲ　基準となる確率を 0.05 と定める。

Ⅱの仮説のもとで，「A 校が 5 連勝する」確率を求めると，$\left(\frac{1}{2}\right)^5 \fallingdotseq 0.03$ であり，基準となる確率 0.05 より「　　　　　　」。よって，Ⅱで立てた仮説が誤っていると判断できる。したがって，Ⅰで立てた仮説「A 校の野球部の方が B 校の野球部より強い」は，正しいといえる。

{ メモ }

1

あるコインを 6 回投げたところ，表が 5 回出た。この結果から，このコインは表が出やすい，と判断してよいか。基準となる確率を 0.05 として，仮説検定を行うことによって考察せよ。ただし，表と裏が出る確率がともに 0.5 であるコインを 6 回投げて表が出た回数を記録する操作を 1000 セット行った結果が以下の表であるとし，この結果を用いよ。

表の回数	0	1	2	3	4	5	6	計
度数	16	90	229	320	235	96	14	1000

Point Pickup

仮説検定の手順

① 主張したい仮説を立てる

② ①に反する仮説を立てる

③ ②で立てた仮説が正しいかどうかを，確率を計算し，あらかじめ定めた基準となる確率と比較して判断する。

②の仮説が ＿＿＿＿＿＿ と判断できる場合 → ①で立てた仮説が正しいといえる

②の仮説が ＿＿＿＿＿＿ とは判断できない場合 → ①で立てた仮説が正しいとはいえない

｛解答｝

第24講　確認テスト

1　ある学校で給食の改善を行い，無作為に選んだ生徒 30 人にアンケートをとったところ，20 人が以前よりおいしいと答えた。この結果から，以前に比べて給食はおいしくなったと判断してよいか。基準となる確率を 0.05 として，仮説検定を行うことによって考察せよ。ただし，コインを 30 回投げて表の出る回数を記録する実験を 500 セット行ったところ，以下の表のようになった。この結果を用いよ。

表の回数	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
度数	1	1	2	4	6	13	27	40	55	67	75	65	55	38

19	20	21	22	23	24	25	計
22	12	7	5	3	1	1	500

ア

①　給食はおいしくなったと判断してよい。

②　給食はおいしくなったとは判断できない。

{ Note }

第23講　新課程　期待値

1

(1)　取り出した２個の玉に含まれる赤玉の個数は，０，１，２個のいずれかである。

・赤玉が０個となる確率は　$\dfrac{{}_3C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{3}{10}$

・赤玉が１個となる確率は　$\dfrac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}=\dfrac{2\times3}{10}=\dfrac{6}{10}$

・赤玉が２個となる確率は　$\dfrac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\dfrac{1}{10}$

したがって，求める赤玉の個数の期待値は

$$0\times\frac{3}{10}+1\times\frac{6}{10}+2\times\frac{1}{10}=\frac{1}{10}(0\times3+1\times6+2\times1)=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}\text{（個）}$$

(2)　(1)より，もらえる金額 X と確率は以下の通り。

X	0	100	200	計
確率	$\dfrac{3}{10}$	$\dfrac{6}{10}$	$\dfrac{1}{10}$	1

したがって，求める金額の期待値は

$$0\times\frac{3}{10}+100\times\frac{6}{10}+200\times\frac{1}{10}=\frac{1}{10}(0\times3+100\times6+200\times1)=\frac{800}{10}=80\text{（円）}$$

第24講　新課程　仮説検定

1

仮説①「このコインは表が出やすい」

仮説②「このコインは表と裏がかたよりなく出る」，つまり「このコインの表と裏が出る確率がともに 0.5 である」

表より，表が 5 回以上出る場合の相対度数は

$$\frac{96+14}{1000}=0.11$$

よって，このコインを 6 回投げて，表が 5 回以上出る確率は 0.11 と考えられ，基準となる確率 0.05 より大きい。したがって，仮説②が誤りとはいえない(正しいともいえない)。したがって，仮説①は正しいとはいえない。ゆえに，このコインは表が出やすいとは判断できない。

第23講　確認テスト

1　赤玉 2 個，白玉 4 個が入った袋から同時に 2 個の玉を取り出すとき，次の問いに答えよ。

(1)　赤玉の個数の期待値を求めよ。

$$\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\text{（個）}$$

(2)　赤玉 1 個につき 100 円もらえるとき，1 回の試行で受け取る金額の期待値を求めよ。

$$\frac{\boxed{\text{ウエオ}}}{\boxed{\text{カ}}}\text{（円）}$$

{ 解答 }

1　(1)　ア　2　　イ　3

(2)　ウ　2　　エ　0　　オ　0　　カ　3

第24講 確認テスト

1 ある学校で給食の改善を行い，無作為に選んだ生徒 30 人にアンケートをとったところ，20 人が以前よりおいしいと答えた。この結果から，以前に比べて給食はおいしくなったと判断してよいか。基準となる確率を 0.05 として，仮説検定を行うことによって考察せよ。ただし，コインを 30 回投げて表の出る回数を記録する実験を 500 セット行ったところ，以下の表のようになった。この結果を用いよ。

表の回数	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	計
度数	1	1	2	4	6	13	27	40	55	67	75	65	55	38	22	12	7	5	3	1	1	500

ア

① 給食はおいしくなったと判断してよい。

② 給食はおいしくなったとは判断できない。

｛解答｝

1 ア ②